



Prof. Dr. H.-D. Donder

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

25. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Seien $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, messbar mit $A_k \subseteq A_{k+1}$. Zeigen Sie, dass:

$$v\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sup \{v(A_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ messbar ist.

Aufgabe 3: Sei $A \subseteq [0, 1]^2$ messbar mit $v(A) > 0$, und für $y \in [0, 1]$ setze $A_y = \{x \mid (x, y) \in A\}$. Weiterhin sei $B \subseteq [0, 1]$ mit $v(B) = 1$. Zeigen Sie, dass ein $b \in B$ existiert mit $v(A_b) > 0$.

Aufgabe 4: Sei $f : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass:

$$\int_a^b \left(\int_a^y f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_x^b f(x, y) dy \right) dx$$

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 6. Dezember 2010 im Übungskasten.



Andreas Fackler

6. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Sei $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

1. *Fall:* Nehmen wir zuerst an, das Supremum habe den endlichen Wert $C \in \mathbb{R}$. Dann ist $v(A_k) \leq C$ für alle A_k , also sind alle A_k integrierbar. Wegen $A_k \subseteq A_{k+1}$ ist die Folge der charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{A_k}$ monoton wachsend. Damit ist auch die Folge der Integrale

$$v(A_k) = \int \mathbf{1}_{A_k} \, dx$$

monoton wachsend; außerdem ist ihr Supremum C , das heißt, sie konvergiert gegen C . Nach dem Satz von Levi ist also auch der punktweise Limes der $\mathbf{1}_{A_k}$ integrierbar mit Integral C :

$$v(A) = \int \mathbf{1}_A \, dx = \int \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_k} \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \mathbf{1}_{A_k} \, dx = C$$

2. *Fall:* Nehmen wir nun an, das Supremum sei ∞ . Da $A_k \subseteq A$ für alle k , ist $v(A_k) \leq v(A)$ für alle k , also muss $v(A) = \infty$ sein.

Aufgabe 2: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist für alle $r > 0$ die Menge $V \cap U_r(0)$ beschränkt und offen, also $\mathbf{1}_{V \cap U_r(0)} = \mathbf{1}_V \cdot \mathbf{1}_{U_r(0)}$ integrierbar. Das heißt aber, dass $\mathbf{1}_V$ über allen $U_r(0)$ mit $r > 0$ integrierbar ist. Folglich ist $\mathbf{1}_V$ lokal-integrierbar und damit V messbar.

Sei nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann ist für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge $A \cap K$ kompakt, also $\mathbf{1}_{A \cap K} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_K$ integrierbar. Das heißt, dass $\mathbf{1}_A$ über jeder kompakten Menge integrierbar ist. Folglich ist $\mathbf{1}_A$ lokal-integrierbar und damit A messbar.

Aufgabe 3: Da A messbar und beschränkt, also integrierbar ist, ist auch $\mathbf{1}_A$ integrierbar. Also gibt es nach dem Satz von Fubini eine Nullmenge $N \subseteq [0, 1]$, so dass für alle $y \in [0, 1] \setminus N$ die Funktion $x \mapsto \mathbf{1}_A(x, y)$ integrierbar ist und es gilt:

$$0 < v(A) = \int \mathbf{1}_A \, d(x, y) = \int_{[0,1] \setminus N} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_A(x, y) \, dx \right) dy$$

Da $[0, 1] \setminus B$ eine Nullmenge ist, ist dies nach dem Modifikationssatz gleich dem folgenden Integral:

$$\int_{B \setminus N} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_A(x, y) \, dx \right) dy$$

Da es nicht null ist, gibt es also ein $b \in B \setminus N$, so dass

$$0 \neq \int_{[0,1]} \mathbf{1}_A(x, b) \, dx = \int_{[0,1]} \mathbf{1}_{A_b}(x) \, dx = v(A_b),$$

also A_b keine Nullmenge ist.

Aufgabe 4: Sei $A = \{(x, y) \in [a, b]^2 \mid x \leq y\}$. Dann ist A kompakt, also $\mathbf{1}_A$ integrierbar. Somit ist auch $f \cdot \mathbf{1}_A$ integrierbar. Für alle $x, y \in [a, b]^2$ ist $\mathbf{1}_A(x, y) = \mathbf{1}_{[a,y]}(x) = \mathbf{1}_{[x,b]}(y)$. Nach dem Satz von Fubini existiert für fast alle x das Integral $\int_{[a,b]} f(x, y) \cdot \mathbf{1}_A(x, y) \, dy$ und es ist

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]^2} f(x, y) \cdot \mathbf{1}_A(x, y) \, d(x, y) &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} f(x, y) \cdot \mathbf{1}_A(x, y) \, dy \right) \, dx \\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} f(x, y) \cdot \mathbf{1}_{[x,b]}(y) \, dy \right) \, dx \\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[x,b]} f(x, y) \, dy \right) \, dx \end{aligned}$$

Ebenso folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\int_{[a,b]^2} f(x, y) \cdot \mathbf{1}_A(x, y) \, d(x, y) = \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,y]} f(x, y) \, dx \right) \, dy$$